667. Haar ノ measure ニ就イテ, II

角谷　静夫（阪大）

最初ニ前号ノ誤リヲ訂正スル。

前号ノ最後347頁ノ下ヨリ7行目以下ヲ次ノ如ク訂正スル。

「μ ノ total variation $\bar{\mu}$ ヲ考ヘル。$\bar{\mu}$ ハ任意ノ Borel 集合ニ對シテ $\bar{\mu}(E)=\mu(E\cdot P)-\mu(E\cdot N)$ ニヨツテ與ヘラレル。$\bar{\mu}$ ハ totally additive, left-invariant, non-negative デアリ、且ツ任意ノ $a\in G$ ニ對シテ $\bar{\mu}(P\dotplus aP-P\cdot aP)=0$ トナルカラ G ガ ergodic ナリトノ假定ヨリ $\bar{\mu}(P)=0$ 又ハ $\bar{\mu}(G-P)=\bar{\mu}(N)=0$ トナラネバナラナイ。然ルニ他方 $\mu(E_1)>0$, $\mu(E_2)<0$ ナル如キ Borel 集合 E_1, E_2 ガ存在スルコトヨリ

$$\bar{\mu}(P)\geqq\bar{\mu}(E_1\cdot P)\geqq\mu(E_1)>0,$$
$$\bar{\mu}(N)\geqq\bar{\mu}(E_2\cdot N)\geqq-\mu(E_2)>0$$

トナルカラコレハ矛盾デアル。ヨツテ G ノ left-invariant ナ measure ハ unique デナケレバナラナイ」

コレデ証明ハ終ルノデアルガ、コヽニ注意スベキハ $\bar{\mu}$ ガ

必ラズシモ open set ニ對シテ正トナラヌコトデアル。ヨッテ ergodic ノ定義ニ於ケル measure μ ニ對シテモ、open set ニ對シテ正トナルコトヲ假定シナイコトニスル。コノヤウナ μ ニ對シテモ (I) ノ證明ガソノママ成立スルコトハ明カデアロウ。（然シナガラ一般ニ measure ト云ヘバ open set ニ對シテ正トナルモノヲ考ヘル）

次ニ locally bicompact ナ topological group ニ對スル Haar ノ measure ノ uniqueness ヲ證明スル。コノ場合ハ、一般ニ group ハ separable デナイカラ、G全体ヲ前ト同樣ノ方法デPトNトニ分ケルコトガ出來ナクナル。ソレデ仕方ガナイカラ bicompact ナ範囲ダケヲ考ヘルノデアル。

G ヲ locally bicompact ナ topological group トセヨ。G ノ left-invariant ナ measure ガ unique デナケレバ前ト同樣ニシテ、二ツノ left-invariant ナ measure μ_1, μ_2, 二ツノ Borel set E_1, E_2 ($\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ ガ何レモ bicompact ニナルモノ) 及ビ real number α ガ存在シテ

$\mu_1(E_1) > \alpha\mu_2(E_1)$, $\mu_1(E_2) < \alpha\mu_2(E_1)$ トナル。

今 E_1, E_2 (U, $U^{-1}=U$, $\overline{U}$ ガ bicompact ナル如キ開集合 U ヲ考ヘル。カヽル U ハ G ガ locally bicompact ナルコトヨリ必ズ存在スル。$\overline{U}$ ガ bicompact ナルコトヨリ $\overline{U^3}$ ハ又 bicompact デア

ル。

($\mathfrak{U}^n$ ハ $X=X_1X_2\cdots\cdots X_n$, $X_i\in\mathfrak{U}$, $i=1,2,\cdots,n$ ナル如キ点X全体ノ集リデアル。) ヨッテ $\mathfrak{U}^3$ ハ $\mu=\mu_1-\alpha\mu_2$ ナル totally additive ナ set-function ニ関シテ positive part P ト negative part N トニ分タレル。

又 μ ノ total variation $\bar{\mu}$ ハ $E\subset\mathfrak{U}^3$ ナル Borel 集合 E ニ對シテ $\bar{\mu}(E)=\mu(E\cdot P)-\mu(E\cdot N)$ ニヨッテ與ヘラレル。

コノ P 及ビ $\bar{\mu}$ ガ任意ノ $a\in\mathfrak{U}^2$ ニ對シテ

$$\bar{\mu}((P+aP-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U})=0$$

ヲ満足シテヰルコトヲ証明ショウ.

$$P+aP-P\cdot aP=(P-P\cdot aP)+(aP-P\cdot aP)$$

デアルカラ

(i) $\bar{\mu}((P-P\cdot aP)\mathfrak{U})=0$

(ii) $\bar{\mu}((aP-P\cdot aP)\mathfrak{U})=0$

ヲ証明スレバ十分デアル。

(i) ノ証明: 先ヅ $(P-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U}\subset P$ ナル故

$$\bar{\mu}((P-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U})=\mu((P-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U})\geqq 0$$

次ニ $(P-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U}\subset\mathfrak{U}-aP\cdot\mathfrak{U}\subset a\mathfrak{U}^3-aP=aN$

ナル故 $\mu((P-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U})\leqq 0$

$$\therefore\ \bar{\mu}((P-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U})=0$$

(ii) ノ証明: 先ヅ $(aP-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U}\subset aP$

ナル故 $\mu((aP-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U})\geqq 0$

次＝ $(aP-P\cdot aP)\cdot \mho \subset \mho - P\cdot \mho \subset \mho^3 - P = N$

ナル故 $\bar{\mu}((aP-P\cdot aP)\cdot\mho) = -\mu((aP-P\cdot aP)\cdot \mho) \geqq 0$

$\therefore\quad \bar{\mu}((aP-P\cdot aP)\mho)=0$

ヨッテ P ノ *characteristic function* ヲ $\varphi(x)$ トスレバ

$$\int_{\mho}\left|\varphi(x)-\varphi(ax)\right| d\bar{\mu}(x)=0$$

ガ任意ノ $a^{-1}\in\mho^2$ （コレハ $a\in\mho^2$ ト同等）＝對シテ成立スル。即チ任意ノ *measure* $\lambda(a)$ ＝對シテ

$$\iint_{\mho\times\mho^2}\left|\varphi(x)-\varphi(ax)\right| d\bar{\mu}(x)\,d\lambda(a)=0$$

コヽデ $\lambda(a)$ トシテ *right-invariant* ナ *measure* ヲ取ル。

Fubini ノ定理ヨリ $\mho\supset M_0$, $\bar{\mu}(M_0)=0$ ナル集合 M_0 ガ定マリ

$$\int_{\mho^2}\left|\varphi(x)-\varphi(ax)\right| d\lambda(a)=0$$

ガ $x\in\mho-M_0$ ＝對シテ成立スル。即チ、$x\in\mho-M_0$ ナル各々ノ x ＝對シテ λ-*measure zero* ナ集合 E_x ガ定マリ $a\in\mho^2-E_x$ ナルトキ $\varphi(x)=\varphi(ax)$、又ハ $z\in(\mho^2-E_x)\cdot x$ ナルトキ $\varphi(x)=\varphi(z)$. 然ル＝ $x\in\mho$ ナルトキ $\mho^2x\supset\mho$ デアルカラ $z\in\mho-E_x\cdot x$ ナルトキ $\varphi(x)=\varphi(z)$.

同様＝任意ノ $y\in\mho-M_0$ ＝對シテ λ-*measure* *zero* ナ集合 E_y ガ定マリ $z \in U - E_y \cdot y$ ナルトキ $\varphi(y) = \varphi(z)$. 然ルニ $\lambda(U) > 0$, $\lambda(E_x \cdot x) = \lambda(E_y \cdot y) = 0$ デアルカラ $z \in U - E_x \cdot x - E_y \cdot y$ ナル z ガ存在スル。ヨッテ $\varphi(x) = \varphi(y)$. 即チ $\varphi(x)$ ハ $U - M_0$ ニテ *constant*. ヨッテ $\bar{\mu}(P \cdot U) = 0$ 又ハ $\bar{\mu}(U - P) = 0$.

然ルニ他方 $\mu(E_1) > 0$, $\mu(E_2) < 0$, $E_1, E_2 \subset U$ ナル *Borel* 集合 E_1, E_2 ガ存在シタカラ $\bar{\mu}(P \cdot U) \geqq \bar{\mu}(P \cdot E_1) \geqq \mu(E_1) > 0$, $\bar{\mu}(U - P) \equiv \bar{\mu}(N \cdot U) \geqq \bar{\mu}(N \cdot E_2) \geqq -\mu(E_2) > 0$ トナラネバナラナイ。コレハ矛盾デアルカラ G ノ *left-invariant* ナ *measure* ハ *unique* デナケレバナラナイ。

——(証明終)——

〔注意〕コノ証明ノ最後ノ部分ハ次ノゴトクスルコトモ出来ル。

(コノ方法ハ深宮氏ニ教ヘテイタダキマシタ) $x \in U - M_0$ ニ對シテ成立スル式

$$\int_{U^2} |\varphi(x) - \varphi(ax)|\, d\lambda(a) = 0$$

ヨリ $$\int_{U^2} \varphi(x) |\varphi(x) - \varphi(ax)|\, d\lambda(a) = 0$$

$$\varphi(x) \int_{U^2} (1 - \varphi(ax))\, d\lambda(a) = 0$$

λ ガ *right-invariant* デアルカラ

$$\varphi(x) \int_{U^2 x} (1 - \varphi(a))\, d\lambda(a) = 0$$

$x \in U$ ナルトキ $U \subset U^2 x$ ナル故

$$\varphi(x)\int_U (1-\varphi(a))\,d\lambda(a) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

同様ニ $\varphi(x)$ ヲカケル代リニ $\varphi(ax)$ ヲカケレバ

$$(1-\varphi(x))\int_{U^2} \varphi(ax)\,d\lambda(a) = 0$$

$$(1-\varphi(x))\int_U \varphi(a)\,d\lambda(a) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) ハ $x \in U - M_0$ ニ對シテ成立スル。

然ルニ

$$\int_U (1-\varphi(a))\,d\lambda(a) + \int_U \varphi(a)\,d\lambda(a) = \int_U d\lambda(a) = \lambda(U) > 0$$

デアルカラ

$$\int_U (1-\varphi(a))\,d\lambda(a), \quad \int_U \varphi(a)\,d\lambda(a)$$

ノウチ少クトモ一ツハ正デナケレバナラナイ。ヨツテ(1)又ハ(2)ヨリ $\varphi(x) \equiv 0$ 又ハ $\varphi(x) \equiv 1$ $(x \in U - M_0)$ ヲ得ル。